Fonctions affines

Exercices corrigés

Sont abordés dans cette fiche :

- **Exercice 1 :** antécédent, image, résolution d'équation, représentation graphique d'une fonction affine (coefficient directeur et ordonnée à l'origine d'une droite)
- **Exercice 2 :** détermination d'une fonction affine, taux d'accroissement
- **Exercice 3 :** fonction affine par intervalles (par morceaux)
- **Exercice 4 :** sens de variation d'une fonction affine
- **Exercice 5 :** signe d'un binôme $ax+b$, inéquation du premier degré à une inconnue (résolution algébrique et résolution graphique)

Exercice 1 *(5 questions)* — *Niveau : facile*

Soit f la fonction affine définie, pour tout nombre réel x, par $f(x) = -3x + 2$.

1- Déterminer $f(0)$ et $f(-1)$.
2- Calculer l'image de $1/3$ par f.
3- Résoudre $f(x) = -5$.
4- Calculer l'antécédent de 4 par f.
5- Construire la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé.

Correction de l'exercice 1

Rappel : Fonction affine

Une fonction affine f est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, où a et b désignent deux réels.

Cas particuliers :

- Si $b = 0$, f est dite linéaire.
- Si $a = 0$, f est dite constante.

On définit, pour tout nombre réel x, la fonction affine f par $f(x) = -3x + 2$.

1-

Pour déterminer $f(0)$, il suffit de remplacer x par 0 dans l'expression de f.

$$\boxed{f(0) = -3 \times 0 + 2 = 2}$$

x désigne l'**antécédent** et **$f(x)$** désigne l'**image** par la fonction f.

Remarque : On peut traduire ce résultat de chacune des manières suivantes :

- 0 a pour image 2 par f
- 2 a pour antécédent 0 par f

Pour déterminer $f(-1)$, il suffit de remplacer x par -1 dans l'expression de la fonction f.

$$f(-1) = -3 \times (-1) + 2 = 3 + 2 = 5$$

Ainsi, $\boxed{-1 \text{ a pour image 5 par } f}$. On peut aussi conclure ainsi : 5 a pour antécédent par f le nombre -1.

2- L'image de $1/3$ par f est déterminée en remplaçant x par $1/3$ dans l'expression de la fonction f.

Ainsi, $f(1/3) = -3 \times (1/3) + 2 = -1 + 2 = 1$. $\boxed{\text{L'image de } 1/3 \text{ par } f \text{ est } 1.}$

3- Résolvons l'équation $f(x) = -5$.

$f(x) = -5$
$-3x + 2 = -5$
$-3x + 2 - 2 = -5 - 2$
$-3x = -7$
$\dfrac{-3x}{-3} = \dfrac{-7}{-3}$
$\boxed{x = 7/3}$

Autrement dit, -5 a pour antécédent par f le nombre $7/3$.

4- Calculons l'antécédent de 4 par f. Pour ce faire, résolvons l'équation $f(x) = 4$.

$f(x) = 4$
$-3x + 2 = 4$
$-3x + 2 - 2 = 4 - 2$
$-3x = 2$
$\dfrac{-3x}{-3} = \dfrac{2}{-3}$
$x = \dfrac{-2}{3}$

$\boxed{\text{L'antécédent de 4 par } f \text{ est } -2/3.}$

5- Construisons en rouge la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé.

Rappel : Représentation graphique d'une fonction affine

Une fonction affine est représentée par une droite d'équation $y = ax + b$, où a et b désignent deux réels..

Cas particuliers :

- Si $b = 0$, la droite passe par l'origine du repère.
- Si $a = 0$, la droite est parallèle à l'axe des abscisses.

Le nombre a est appelé le coefficient directeur de la droite et le nombre b est appelé l'ordonnée à l'origine.

Pour cela :

- Traçons tout d'abord un repère dont les axes sont perpendiculaires et dont les unités d'axe sont identiques.
- Plaçons ensuite deux points appartenant à la droite représentative de la fonction f. D'après la première question, les points A et B de coordonnées respectives $(0\ ;\ 2)$ et $(-1\ ;\ 5)$ appartiennent à cette droite puisque $f(0) = 2$ et $f(-1) = 5$.
- Traçons enfin la droite passant par les points A et B. Cette droite est représentative de la fonction f et a pour équation : $y = -3x + 2$.

Rappel : Coordonnées d'un point dans un repère

Les coordonnées d'un point dans un repère sont toujours notées $(\boldsymbol{x}\ ;\boldsymbol{y})$ où :

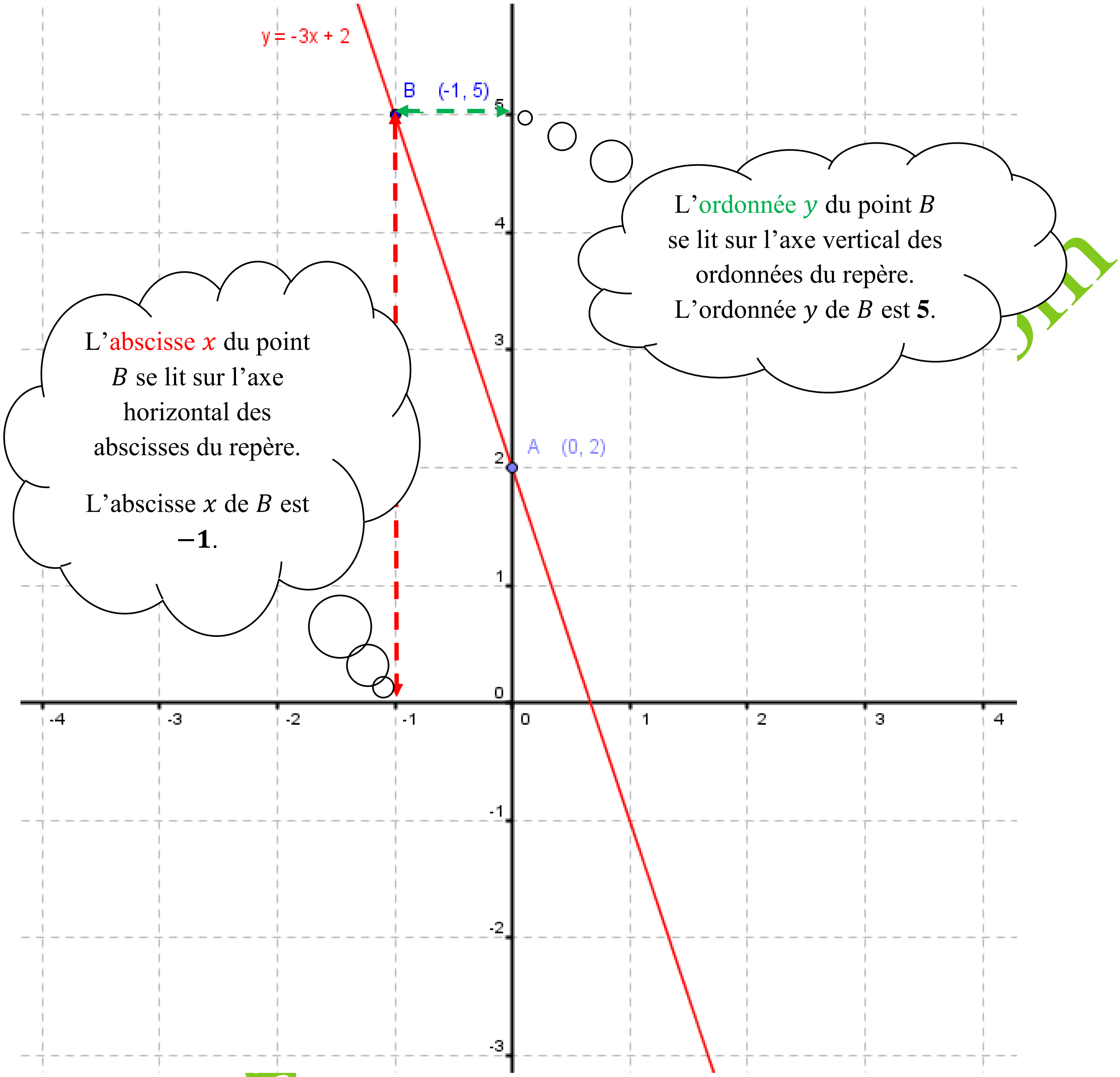
- x désigne l'abscisse de ce point
- y désigne son ordonnée.

Remarque :

On peut associer une fonction affine à sa droite représentative et faire correspondre :

- l'antécédent x par la fonction f à l'abscisse x du point sur la droite représentative de f
- l'image $f(x)$ de x par la fonction f à l'ordonnée y du point de la droite représentative de f

Fonction	antécédent	x	image	$f(x)$
Droite	abscisse du point	x	ordonnée du point	y



Exercice 2 *(1 question)* — *Niveau : facile*

Trouver la fonction affine f telle que $f(1) = 2$ et $f(3) = -4$.

Correction de l'exercice 2

f est une fonction affine donc, pour tout x réel, $f(x) = ax + b$, où a et b désignent deux réels.

1- Commençons par déterminer a, le taux d'accroissement de f, sachant que $f(1) = 2$ et $f(3) = -4$.

Rappel : Taux d'accroissement d'une fonction affine

Soit f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$. Alors, pour tous nombres x_1 et x_2 distincts (c'est-à-dire pour tous nombres x_1 et x_2 tels que $x_1 \neq x_2$), le taux d'accroissement a de la fonction f est donné par la relation :

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$a = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-4 - 2}{2} = -3$$

Dès lors, on obtient que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + b$.

2- Déterminons désormais b.

L'énoncé indique que $f(1) = 2$.

Or, $f(1) = 2 \Leftrightarrow -3 \times 1 + b = 2 \Leftrightarrow -3 + b = 2 \Leftrightarrow b = 5$

On sait que pour tout x réel, $f(x) = -3x + b$ donc, pour $x = 1$, $f(1) = -3 \times 1 + 3$

Remarque : On aurait pu procéder de même avec $f(3) = -4$ pour trouver $b = 5$.

3- Concluons.

La fonction affine f telle que $f(1) = 2$ et $f(3) = -4$ est définie pour tout x réel par $\boxed{f(x) = -3x + 5}$.

Exercice 3 *(1 question)* — *Niveau : facile*

Représenter graphiquement la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = 2x + 1 & si \quad x < -2 \\ f(x) = -3 & si \quad -2 \leq x \leq 2 \\ f(x) = -x - 1 & si \quad x > 2 \end{cases}$

Correction de l'exercice 3

Représentons graphiquement la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = 2x + 1 & si \quad x < -2 \\ f(x) = -3 & si \quad -2 \leq x \leq 2 \\ f(x) = -x - 1 & si \quad x > 2 \end{cases}$

f est une fonction affine définie par intervalles (ou par morceaux) :

1) Pour tout $x \in]-\infty\,;\,-2[$, f est définie par $f_1(x) = 2x + 1$
2) Pour tout $x \in [-2\,;\,2]$, f est définie par $f_2(x) = -3$
3) Pour tout $x \in]2\,;\,+\infty[$, f est définie par $f_3(x) = -x - 1$

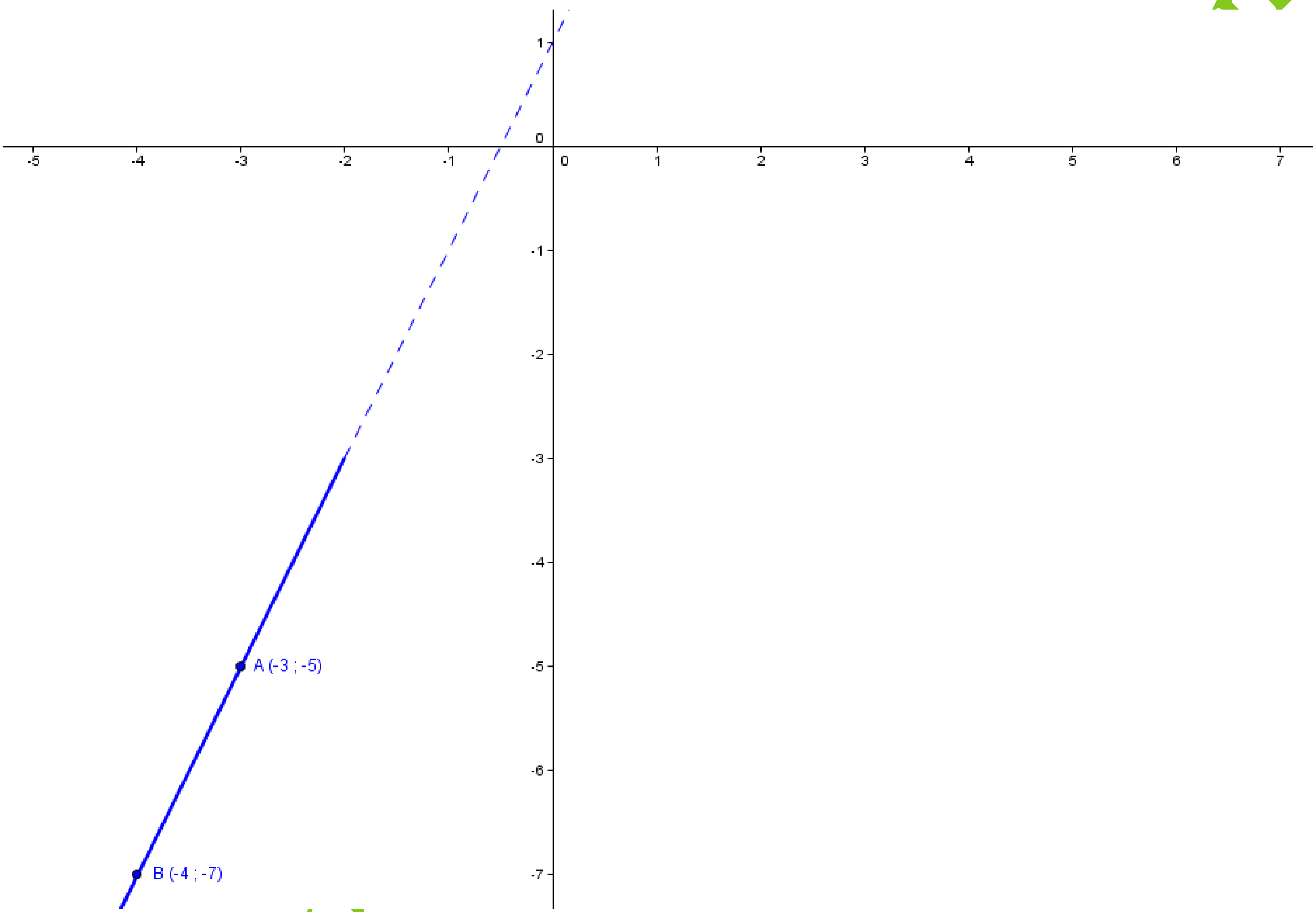
Il convient alors de tracer la représentation graphique des fonctions f_1, f_2 et f_3 définies sur leur intervalle respectif.

1) Commençons par tracer en bleu la droite représentative de la fonction f_1.

Pour tout $x \in]-\infty\ ;\ -2[$, f est définie par $f_1(x) = 2x + 1$.

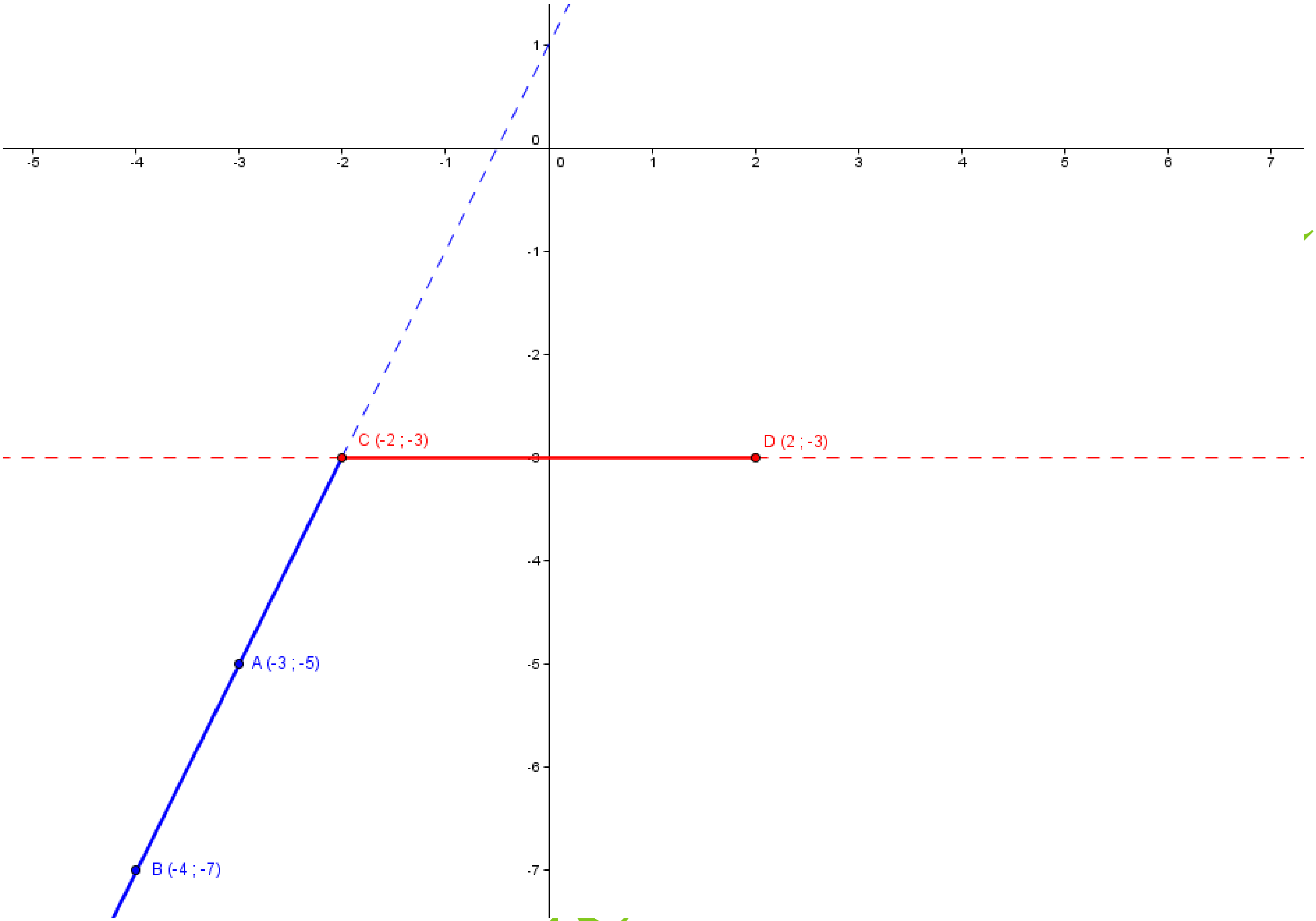
Ainsi, $f_1(-3) = 2 \times (-3) + 1 = -5$ et $f_1(-4) = -7$.

Dans un premier temps, plaçons dans un repère orthonormé les points A et B de coordonnées respectives $(-3\ ;\ -5)$ et $(-4\ ;\ -7)$ puis traçons dans un second temps, en pointillés, la droite (AB). Enfin, repassons en bleu les points de la droite pour lesquels $x \in]-\infty\ ;\ -2[$.

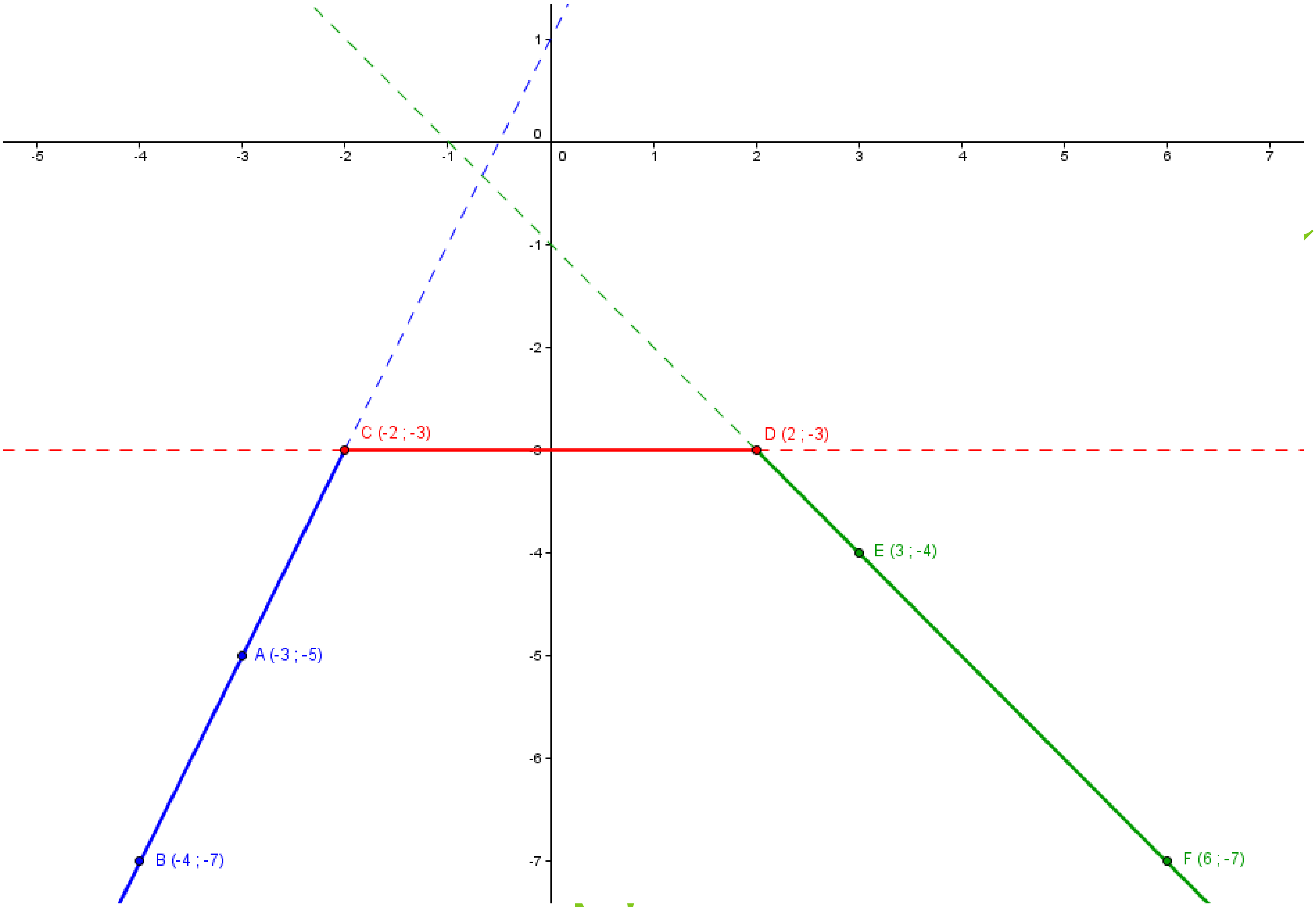


Remarque : Le trait continu désigne ainsi le morceau de droite (d'où la terminologie « fonction affine par morceaux ») représentative de la fonction sur son intervalle de définition.

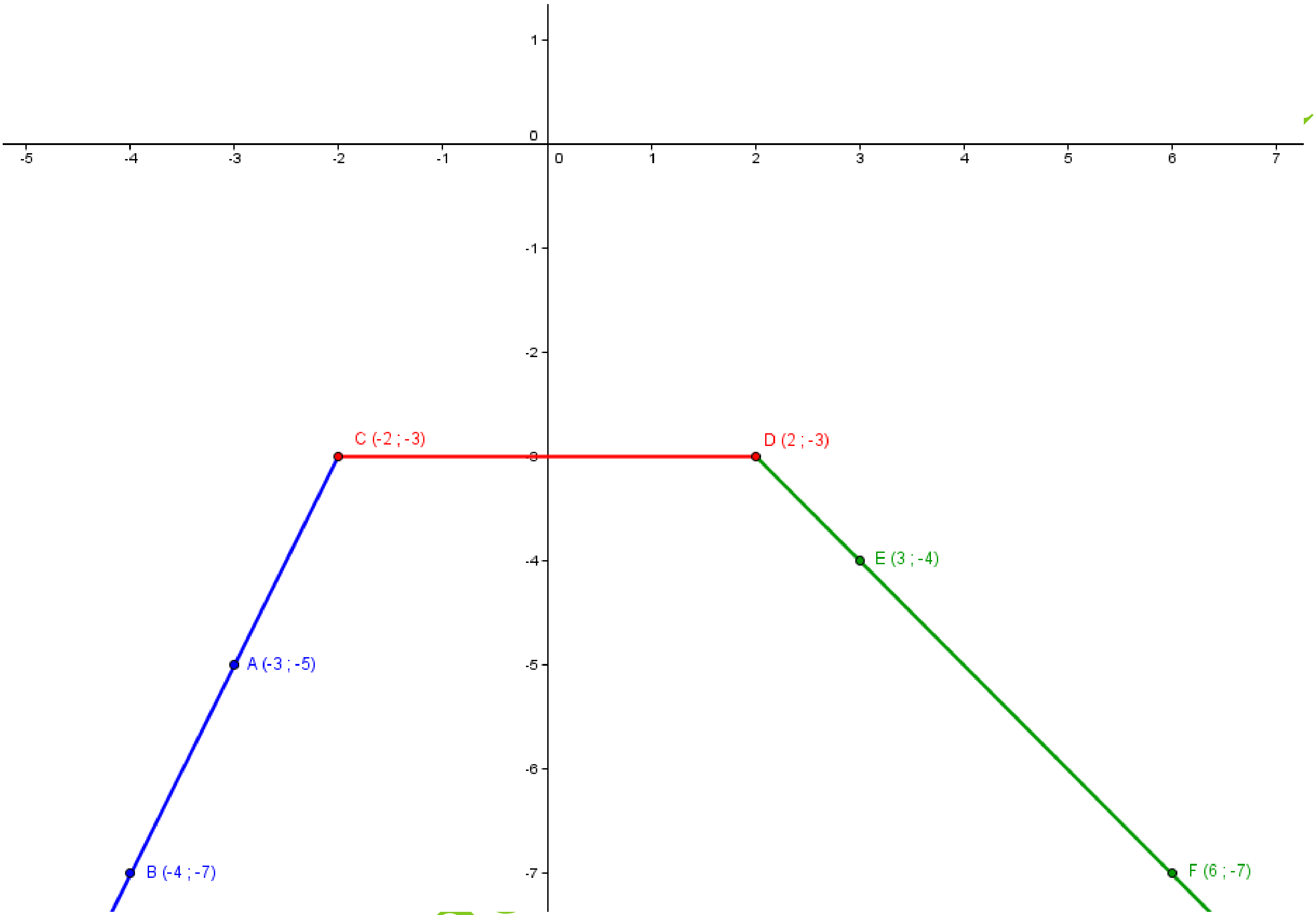
2) Traçons de la même manière en rouge la droite représentative de la fonction f_2.



3) Construisons enfin en vert la représentation graphique de la fonction f_3.



4) La représentation graphique de la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = 2x+1 & si \quad x < -2 \\ f(x) = -3 & si \quad -2 \leq x \leq 2 \\ f(x) = -x-1 & si \quad x > 2 \end{cases}$ est donc :



Exercice 4 *(1 question)* — *Niveau : facile*

Indiquer le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - 2x$.

Correction de l'exercice 4

Rappel : Sens de variation d'une fonction affine

Soit f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$. Alors, le sens de variation de la fonction f dépend du signe de a.

- si $a = 0$, la fonction est constante sur $\mathbb{R}$
- si $a > 0$, la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (si $a \geq 0$, la fonction est croissante sur $\mathbb{R}$)
- si $a < 0$, la fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ (si $a \leq 0$, la fonction est décroissante sur $\mathbb{R}$)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - 2x$. La fonction f est de la forme $f(x) = ax + b$ avec $a = -2$ et $b = 3$; en effet, pout tout x réel, $f(x) = 3 - 2x = -2x + 3$. On reconnaît donc l'écriture d'une fonction affine dont la croissance est déterminée par le signe de a.

Par conséquent, comme $a < 0$, $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}}$.

Exercice 5 *(4 questions)* *Niveau : facile*

Pour tout x réel, on donne $f(x) = x\sqrt{2} - 2$ et $g(x) = -2x + \sqrt{2}$.

1) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x et donner le résultat dans un tableau de signes.
2) Résoudre algébriquement $g(x) \leq 0$.
3) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$.

Correction de l'exercice 5

1) Soit $f(x) = x\sqrt{2} - 2$; déterminons le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Rappel : Signe du binôme $ax + b$

$a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		$-$	0	$+$	

$a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		$+$	0	$-$	

La fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{2} - 2$ est une fonction affine de la forme $f(x) = ax + b$ avec $a = \sqrt{2}$ et $b = -2$.

D'après la propriété ci-dessus,

- $f(x) = 0$ lorsque $x = -\frac{-2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{2 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$
- $f(x) < 0$ lorsque $x < -\frac{-2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x < \sqrt{2}$
- $f(x) > 0$ lorsque $x > -\frac{-2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x > \sqrt{2}$

Le tableau de signe de $f(x)$ donne donc :

x	$-\infty$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

On multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{2}$ afin d'obtenir un dénominateur entier.

Remarque : Une autre méthode consiste à résoudre l'équation $f(x) = 0$ puis les inéquations $f(x) > 0$ et $f(x) < 0$. Résolvons $f(x) = 0$ puis $f(x) > 0$.

Pour tout x réel,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{2} - 2 = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{2} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{2 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

Pour tout x réel,

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x\sqrt{2} - 2 > 0 \Leftrightarrow x\sqrt{2} > 2 \Leftrightarrow x > \frac{2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x > \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \Leftrightarrow x > \frac{2\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x > \sqrt{2}$$

2) Soit $g(x) = -2x + \sqrt{2}$.

Attention ! Il convient de changer le sens de l'inégalité car on divise par un nombre négatif (-2).

Résolvons algébriquement $g(x) \leq 0$.

Pour tout x réel,

$$g(x) \leq 0 \Leftrightarrow -2x + \sqrt{2} \leq 0 \Leftrightarrow -2x \leq -\sqrt{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{-\sqrt{2}}{-2} \Leftrightarrow x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ainsi,

$$\boxed{g(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \; ; \; +\infty\right[}$$

3) Résolvons graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$.

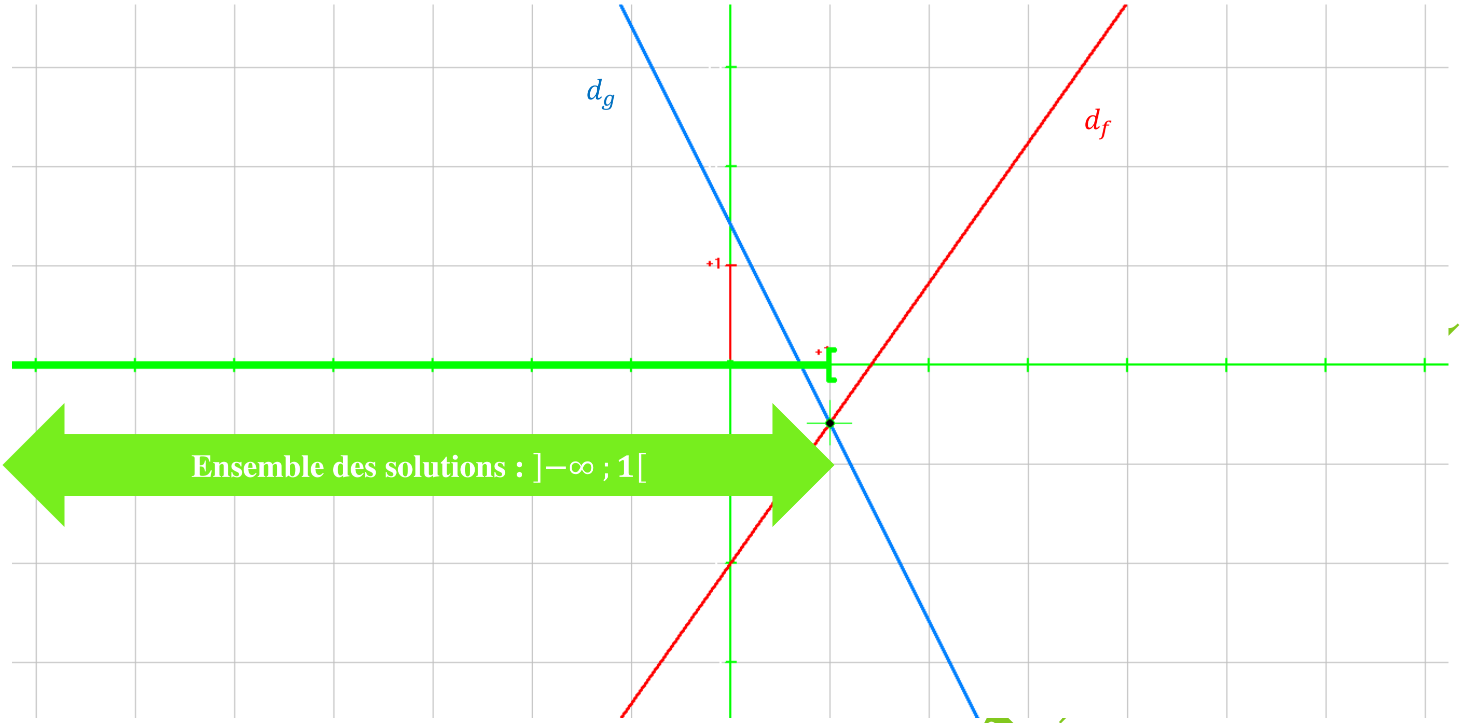
Rappel : Résolution graphique d'inéquations

Soient f et g deux fonctions et soient C_f et C_g leurs courbes représentatives.

- Les solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe C_f situés au-dessous de la courbe C_g.
- Les solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ sont les abscisses des points de la courbe C_f situés au-dessus de la courbe C_g.
- Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f et de la courbe C_g.

Traçons tout d'abord les droites d_f et d_g représentatives des fonctions affines f et g respectivement définies pour tout réel x par $f(x) = x\sqrt{2} - 2$ et $g(x) = -2x + \sqrt{2}$.

Les solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ sont les abscisses des points de la droite d_1 situés au-dessous de la droite d_2.Les points d'abscisse inférieure à 1 satisfont cette condition donc les solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ sont : $]-\infty \, ; 1[$



Remarque : Il est possible de vérifier ces résultats algébriquement. En effet, pour tout réel x,

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow x\sqrt{2} - 2 < -2x + \sqrt{2} \Leftrightarrow x\sqrt{2} + 2x < \sqrt{2} + 2 \Leftrightarrow x(\sqrt{2} + 2) < \sqrt{2} + 2 \Leftrightarrow x < \frac{\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2} + 2}$$

$$\Leftrightarrow x < 1$$

On factorise $x\sqrt{2} + 2x$ par x.

$\sqrt{2} + 2 > 0$ donc le sens de l'inégalité est conservé.